

Моделювання критичних явищ в острівних системах з потоками в межах загальної теорії відносності.

Геннадій Шаповалов, Анатолій Казаков (Національний
університет “Одеська політехніка)

В'ячеслав Олійник (Одеський національний університет)

Мета дослідження

Метою дослідження є критичні явища в острівних системах, та з'ясування умов для фазових перетворень в зазначених системах, до яких можна віднести субатомні частинки.

Справа у тому, що розв'язати таку задачу аналітично в рамках ЗТВ вкрай складно, оскільки виникають дуже складні системи інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язати які не вдається у загальному випадку, або розв'язки приводять до сингулярностей та появ комплексних рішень, які складно інтерпретувати на практиці.

Виходячи з цього, ми робимо спробу іншого підходу прогнозування властивостей острівних систем, моделюючи фазові стани та фазові перетворення за теорією фазових переходів Ландау та теорії катастроф Томма.

Такий підхід нами було вже апробовано та мається низка публікацій, посилання у тезисах, але застосування вказаного підходу у моделюванні критичних станів елементарних частинок на сьогодні не відомо.

Острівні системи в ОТО

Для острівних систем в ОТО ми залуцаємо метрику Плеб'янського-Дем'янського:

$$ds^2 = \frac{1}{(p+q)^2} \left\{ \frac{1+(pq)^2}{P} dp^2 + \frac{P}{1+(pq)^2} (d\sigma + q^2 d\tau)^2 \right. \\ \left. + \frac{1+(pq)^2}{Q} dq^2 - \frac{Q}{1+(pq)^2} (d\tau - p^2 d\sigma)^2 \right\} \quad (1)$$

де $P = P(p)$, $Q = Q(q)$ - функції координат p і q відповідно

Для моделювання критичних явищ було використано компоненти тензора енергії-імпульсу, який, за розв'язком Плеб'янського-Дем'янського мають вигляд:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} -(\alpha + \beta) \frac{(p+q)^4}{(1+(pq)^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha + \beta) \frac{(p+q)^4}{(1+(pq)^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha + \beta) \frac{(p+q)^4}{(1+(pq)^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha + \beta) \frac{(p+q)^4}{(1+(pq)^2)^2} \end{pmatrix} \quad 2$$

Основні етапи моделювання

За Плеб'янським-Дем'янським функції координат були застосовані у вигляді:

$$\begin{aligned} P(p) &= (-(\lambda/6) - \alpha) + 2np - \varepsilon p^2 + 2mp^3 + (-(\lambda/6) - \beta)p^4 \\ Q(q) &= (-(\lambda/6) - \alpha) + 2nq - \varepsilon q^2 + 2mq^3 + (-(\lambda/6) - \beta)q^4 \end{aligned} \quad (3)$$

Для визначення умов існування стабільної фази розв'язувалась система рівнянь та нерівностей:

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial p} = 0; \quad \frac{\partial T^{ij}}{\partial q} = 0; \quad \det \frac{d^2 T^{ij}}{dX^2} > 0 \quad (4)$$

Для визначення умов існування біфуркаційної фази:

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial p} = 0; \quad \frac{\partial T^{ij}}{\partial q} = 0; \quad \det \frac{d^2 T^{ij}}{dX^2} = 0 \quad (5)$$

Для визначення умов співіснування, як найменш, двох фаз одночасно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{ij}}{\partial p} = 0; \quad \frac{\partial T^{ij}}{\partial q} = 0; \quad \det \frac{d^2 T^{ij}}{dX^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 T^{ij}}{\partial p^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 T^{ij}}{\partial p^2 \partial q} = 0, \quad \frac{\partial^3 T^{ij}}{\partial p \partial q \partial p} = 0, \quad \frac{\partial^3 T^{ij}}{\partial p \partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 T^{ij}}{\partial q \partial p^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 T^{ij}}{\partial q \partial p \partial q} = 0, \quad \frac{\partial^3 T^{ij}}{\partial q^2 \partial p} = 0, \quad \frac{\partial^3 T^{ij}}{\partial q^3} = 0, \\ \det \frac{d^4 T^{ij}}{dX^4} > 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Особливості моделювання

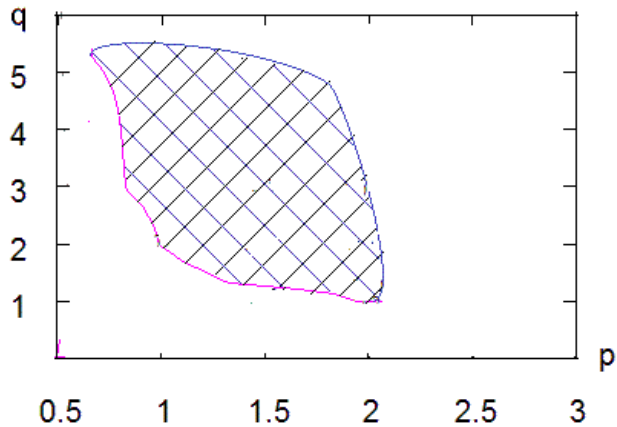
Моделювання передбачало знаходження аналітичних виразів детермінантів компонентів похідних:

$$\frac{d^2 T^{ij}}{dX^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T^{ij}(p, q)}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 T^{ij}(p, q)}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial^2 T^{ij}(p, q)}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 T^{ij}(p, q)}{\partial q^2} \end{pmatrix} \frac{d^4 T^{ij}}{dX^4} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial p^4} & \frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial p^3 \partial q} \right) & \left(\frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial p \partial q \partial p^2} & \frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial p \partial q \partial p \partial q} \right) \\ \left(\frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial p^2 \partial q \partial p} & \frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial p^2 \partial q^2} \right) & \left(\frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial p \partial q^2 \partial p} & \frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial p \partial q^3} \right) \\ \left(\frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial q \partial p^3} & \frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial q \partial p^2 \partial q} \right) & \left(\frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial q^2 \partial p^2} & \frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial q^2 \partial p \partial q} \right) \\ \left(\frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial q \partial p \partial q \partial p} & \frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial q \partial p \partial q^2} \right) & \left(\frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial q^3 \partial p} & \frac{\partial^4 T^{ij}(p, q)}{\partial q^4} \right) \end{pmatrix} \quad (7)$$

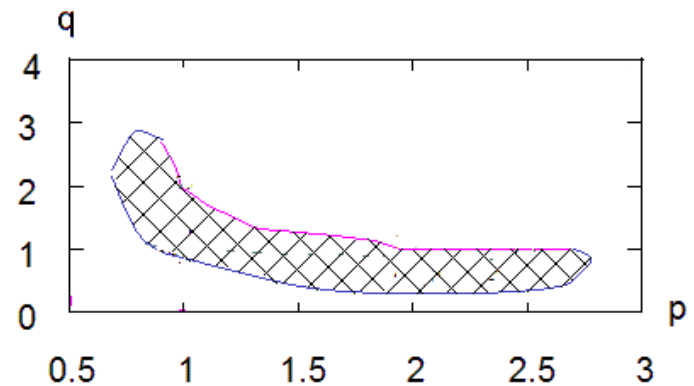
Для цього було застосовано можливості системи комп'ютерної алгебри MAXIMA.

Далі, за отриманими аналітичними виразами, знаходились нульові контури та сигнатура відповідних похідних та детермінантів і відображалися у просторі (p, q)

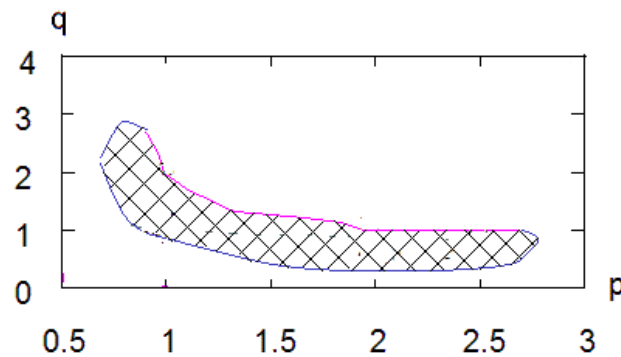
Результати моделювання за компонентами тензора енергії-імпульсу



Результати моделювання просторів стабільності системи



Результати моделювання біфуркаційних просторів системи



Результати моделювання просторів співіснування, як найменш, двох фаз одночасно.

Наступні етапи моделювання

Моделювання за тензором енергії-імпульсу розглядалося тільки як перший етап, з якого було прогнозовано можливість виникнення просторів співіснування фаз у дослідженій системі і наявність сенсу розгляду більш деталізованих моделей.

Наступний крок моделювання передбачає врахування обертання в системі та наявність прискорення, а для моделювання критичних явищ було отримано лагранжіан системи.

Для відокремлення векторної частини функцій було уведено градієнтні вектори:

$$m_i = \frac{\partial x^0}{\partial x^i} = (1,0,0,0) \quad n_i = \frac{\partial x^1}{\partial x^i} = (0,1,0,0) \quad p_i = \frac{\partial x^2}{\partial x^i} = (0,0,1,0) \quad s_i = \frac{\partial x^3}{\partial x^i} = (0,0,0,1) \quad (8)$$

завдяки яких метричний тензор було представлено у вигляді:

$$g_{ik} = Am_i m_k - B(m_i n_k + m_k n_i) - C n_i n_k - D p_i p_k - F s_i s_k \quad (9)$$

де відповідні функції мають вигляд:

$$A = \frac{Q - q^2 P}{(p + q)^2 (1 + (pq)^2)}, \quad B = 2 \frac{p^2 Q + q^2 P}{(p + q)^2 (1 + (pq)^2)}, \quad (10)$$
$$C = -\frac{p^4 Q - P}{(p + q)^2 (1 + (pq)^2)}, \quad D = \frac{1 + (pq)^2}{(p + q)^2 P}, \quad F = \frac{1 + (pq)^2}{(p + q)^2 Q}$$

Лагранжіан острівної системи

Лагранжіан системи шукався через символи Крістофеля у вигляді:

де

$$L_0 = G = \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l g^{ik} - \Gamma_{nm}^m \Gamma_{il}^n g^{il} = \Gamma_{il}^m \Pi_m^{(s)il} - \Pi_{nm}^{(as)m} \Gamma_{il}^n g^{il} \quad (11)$$

$$\Gamma_{il}^m \Pi_m^{(s)il} = \frac{1}{4} \left\{ -\frac{2(D_m p^m)^2}{D} - \frac{2(F_m s^m)^2}{F} - \frac{1}{(B^2 + AC)^2} [A^m A_m C^2 + 4A^m B_m BC - 2A^m C_m B^2 \right.$$

$$+ 2B^m B_m (B^2 - AC) + 4B^m C_m AB + C_m C^m A^2] - \frac{D_m D^m}{D^2} - \frac{F_m F^m}{F^2} \left. \right\}$$

$$\Gamma_{il}^m \Pi_m^{(s)il} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{F^{\Delta^2}}{F^3} + \frac{D^{\Delta^2}}{D^3} + \frac{D^{\Delta^2}}{FD^2} + \frac{F^{\Delta^2}}{DF^2} - \frac{2}{B^2 + AC} \left(\frac{B^{\Delta^2}}{D} + \frac{B^{\Delta^2}}{F} \right) + \frac{1}{(B^2 + AC)^2} [A^2 \left(\frac{C^{\Delta^2}}{D} + \frac{C^{\Delta^2}}{F} \right) \right.$$

$$+ C^2 \left(\frac{A^{\Delta^2}}{D} + \frac{A^{\Delta^2}}{F} \right) - 2B^2 \left(\frac{A^* C^*}{D} + \frac{A^{\Delta} C^{\Delta}}{F} \right) + 4BC \left(\frac{A^* B^*}{D} + \frac{A^{\Delta} B^{\Delta}}{F} \right) + 4AB \left(\frac{B^* C^*}{D} + \frac{B^{\Delta} C^{\Delta}}{F} \right) \left. \right\}$$

$$\Pi_{nm}^{(s)m} \Gamma_{il}^n g^{il} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(B^2 + AC)^2} [-A^2 C^n C_n - 4B^2 B^n B_n - C^2 A_n A^n - 4CBA_n B^n - 2ACA_n C^n - 4ABB_n C^n] \right.$$

$$+ \frac{1}{B^2 + AC} \left[-\frac{2A}{D} C^n D_n - \frac{4B}{D} B_n D^n - \frac{2C}{D} A_n D^n - \frac{2A}{F} C_n F^n - \frac{4B}{F} B_n F^n - \frac{2C}{F} A_n F^n - 2CA_n s^n F_l s^l \right.$$

$$\left. - 2CA_n p^n D_l p^l - 4BB_n p^n D_l p^l - 4BB_n s^n F_l s^l - 2AC_n p^n D_l p^l - 2AC_n s^n F_l s^l \right] - \frac{2(D_n p^n)^2}{D} - \frac{2(F_n s^n)^2}{F}$$

$$- \frac{2}{D} D_n s^n F_l s^l - \frac{2}{DF} D_n F^n - \frac{2}{F} D_l p^l F_n p^n - \frac{1}{D^2} D_n D^n - \frac{1}{F^2} F^n F_n \left. \right\}$$

$$\Pi_{nm}^{(s)m} \Gamma_{il}^n g^{il} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(B^2 + AC)^2} [A^2 \left(\frac{C^{\Delta^2}}{D} + \frac{C^{\Delta^2}}{F} \right) + 4B^2 \left(\frac{B^{\Delta^2}}{D} + \frac{B^{\Delta^2}}{F} \right) + C^2 \left(\frac{A^{\Delta^2}}{D} + \frac{A^{\Delta^2}}{F} \right) \right.$$

$$+ 4CB \left(\frac{A^* B^*}{D} + \frac{A^{\Delta} B^{\Delta}}{F} \right) + 2AC \left(\frac{A^* C^*}{D} + \frac{A^{\Delta} C^{\Delta}}{F} \right) + 4AB \left(\frac{B^* C^*}{D} + \frac{B^{\Delta} C^{\Delta}}{F} \right) \left. \right\}$$

$$+ \frac{1}{B^2 + AC} \left[\frac{2A}{D} \left(\frac{C^* D^*}{D} + \frac{C^{\Delta} D^{\Delta}}{F} \right) + \frac{4B}{D} \left(\frac{B^* D^*}{D} + \frac{B^{\Delta} D^{\Delta}}{F} \right) + \frac{2C}{D} \left(\frac{A^* D^*}{D} + \frac{A^{\Delta} D^{\Delta}}{F} \right) + \frac{2A}{F} \left(\frac{C^* E^*}{D} + \frac{C^{\Delta} F^{\Delta}}{F} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{4B}{F} \left(\frac{B^* F^*}{D} + \frac{B^{\Delta} F^{\Delta}}{F} \right) + \frac{2C}{F} \left(\frac{A^* F^*}{D} + \frac{A^{\Delta} F^{\Delta}}{F} \right) - \frac{2CA^{\Delta} F^{\Delta}}{F^2} - \frac{2CA^* D^*}{D^2} - \frac{4BB^* D^*}{D^2} - \frac{4BB^{\Delta} F^{\Delta}}{F^2} - \frac{2AC^* D^*}{D^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2AC^{\Delta} F^{\Delta}}{F^2} \right] - \frac{2D^{\Delta^2}}{D^3} - \frac{2F^{\Delta^2}}{F^3} + \frac{1}{D^2} \left(\frac{D^{\Delta^2}}{D} + \frac{D^{\Delta^2}}{F} \right) + \frac{1}{F^2} \left(\frac{F^{\Delta^2}}{D} + \frac{F^{\Delta^2}}{F} \right) \left. \right\}$$

Через * і Δ позначено похідні по координатах p і q, відповідно

Майбутні дослідження

За (11) та (12) було отримано лагранжіан системи:

$$L_0 = \frac{1}{2DF} \{ Z[D^\Delta(AC^\Delta + 2BB^\Delta + CA^\Delta) + F^*(AC^* + 2BB^* + CA^*) - FB^{*2} - DB^{\Delta 2}] - Z^2[B^2(FA^*C^* + DA^\Delta C^\Delta + 2FB^{*2} + 2DB^{\Delta 2}) + AC(FA^*C^* + DA^\Delta C^\Delta)] + \frac{FD^{*2}}{D^2} + \frac{DF^{\Delta 2}}{F^2} \} \quad (14)$$

де
$$Z = \frac{1}{(B^2 + AC)^2}$$

$$\begin{aligned} P(p) &= -(\lambda/6) + \gamma - \varepsilon p^2 + (-(\lambda/6) - \gamma)p^4 \\ Q(q) &= -(\lambda/6) + \gamma + \varepsilon q^2 + (-(\lambda/6) - \gamma)q^4 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varepsilon = -\frac{a^2 - b^2}{ab(a^2 + b^2)} \left[1 - \frac{\lambda}{3}(a^2 + b^2) \right]^{1/2} \quad \gamma = \frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{\lambda}{6}$$

“Обертання” та “прискорення” у просторі-часу враховується через параметри a і b . Вважається, що космологічна постійна більша за нуль.

Під час проведення моделювання з використанням систем комп'ютерної алгебри виникло ряд проблем, пов'язаних с громіздкістю виразів. Після вирішення цих проблем будемо публікувати результати.